

5. Zat'ážená obruč

(Peter Maták)



Turnaj Mladých Fyzikov 2013/2014

Zadanie:

Pripevnite na vnútornú stranu obruče malé závažie a potom obruč postrčte. Preskúmajte pohyb obruče.

Ako chápať zadanie

- Vyhýbajte sa triviálnym riešeniam, stačí ak budeme vidieť, že o nich viete.
- Najjednoduchšia verzia úlohy, v ktorej sa prejaví zaujímavá a ťažká fyzika:

Obruč pohybujúca sa v zvislej rovine.

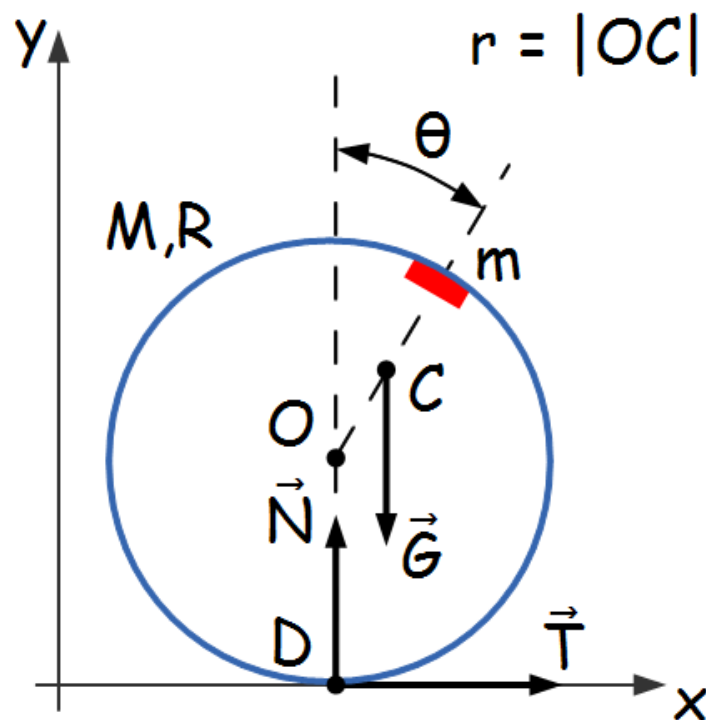
Ako skúmať?

1. teória - výpočty
2. numerické modelovanie
3. experiment - točenie videí pri rôznych parametroch obruče

Kinematika - vhodná literatúra

1. D. Ilkovič: Fyzika I., Alfa 1972 - pekný úvod do mechaniky tuhého telesa.
2. M.Fecko: <http://sophia.dtp.fmph.uniba.sk/~fecko/teormech/primech11.pdf>

Kinematika



poloha stredu obruče - O : $X(t), Y(t)$
poloha ťažiska sústavy - C : $x(t), y(t)$

Počiatočné podmienky

...rozhodujú o budúcom časovom vývoji.
Rozumné hodnoty podľa mňa sú:

$$\begin{aligned} X(0) &= 0, & Y(0) &= R, & \theta(0) &= \theta_0, \\ \dot{X}(0) &= v_0, & \dot{Y}(0) &= 0, & \dot{\theta}(0) &= \omega_0 \end{aligned}$$

Pohybové rovnice - síly

Newtonov zákon pre hmotný bod + zákon akcie a reakcie:

výslednica síl = celková hmotnosť x zrýchlenie
t'ážiska

$$(M+m)a_x = T, \quad (M+m)a_y = N - (M+m)g, \quad \text{kde}$$
$$a_x = \ddot{x}, \quad a_y = \ddot{y}$$

Pohybové rovnice - momenty

Momenty síl počítame vzhľadom na os prechádzajúcu ťažiskom C - inak treba zaradiť moment zotrvačnej sili!!!

Vzdialenosť ťažiska od stredu obruče:

$$|OC| = r = \frac{m}{(M+m)} R$$

Moment zotrvačnosti vzhľadom
na C (Steinerova veta):

$$J = (M+m)R^2 - (M+m)r^2$$

Moment sily:

$$J\ddot{\theta} = Nr \sin\theta - T(R+r \cos\theta)$$

...a všetko pekne spolu:

$$\begin{aligned} (M+m)\ddot{x} &= T, \\ (M+m)\ddot{y} &= N - (M+m)g, \\ J\ddot{\theta} &= Nr \sin\theta - T(R+r \cos\theta) \end{aligned}$$

Valivý pohyb bez prekĺzavania

Koeficient statického trenia obruč - podložka: f_s

$$T < f_s N$$

Požiadavka „neprekĺzavania“ pridá väzbu:

$$\dot{X}(t) = R\dot{\theta}(t)$$

Ostali neznáme: $N, T, \theta(t)$

Riešenie

1. dosadíme vzťahy pre N, T do rovnice pre momenty
2. ťažiskové „ x, y “ vyjadríme pomocou stredy obruče „ X, Y “ ako

$$x(t) = X(t) + r \sin \theta(t), \quad y(t) = R + r \cos \theta(t)$$

3. dostaneme niečo ako:

$$\text{funkcia } \theta, \dot{\theta} \text{ a } \ddot{\theta} = 0$$

Prekízavanie

Koeficient dynamického trenia obruč - podložka: f_d

$$T = f_d N$$

ale ztratili sme väzbu medzi $\dot{X}(t)$ a $\dot{\theta}(t)$

Neznáme: $N, X(t), \theta(t)$

Numerické riešenie pohybových rovníc

Literatúra:

<http://fyzikalniolympiada.cz/texty/modelov0.pdf>

...a potom Excel, Fortran, Mathematica,...

Pozorovanie pohybu obruče

- Teória - experiment **vo veľmi zjednodušenom prípade: namydlená obruč na ľade...** (zhoda?)
- Ako závisí pohyb obruče na f , m/M , R ...
- Kedy obruč začína prešmykovať?
- Koná niekedy spätný pohyb?
- Podskočí?
- Skomplikujme si život: deformácia obruče pod vplyvom závažia, naklonená podložka...

Literatúra

- D. Ilkovič: Fyzika I., Alfa 1972
- <http://fyzikalniolympiada.cz/studijni-texty>
- W. F. D. Theron and M. F. Maritz.
The amazing variety of motions of a loaded hoop. Math. Comp. Modelling 47, 9-10, 1077-1088 (2008)
-uvádza 36 rôznych pohybov obruče:-)